



Universität Stuttgart
Institut für Systemtheorie und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. Frank Allgöwer

Prüfungsklausur Konzepte der Regelungstechnik, 29. Februar 2012

Die Klausur umfasst **11 Seiten** (9 Aufgaben, 58 Punkte).

Name, Vorname: _____

Antworten ohne Begründung werden nicht akzeptiert.

Beachten Sie: im WS 2012/2013 wurde der Vorlesungsteil *Robuste Regelung* ausgeweitet.

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Hinweis: Die Aufgabenteile a), b) und c) können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

Gegeben sei das System

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}}_B u \quad (1.a)$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.b)$$

Zunächst sei $\beta = 1$. Gesucht ist eine Zustandsrückführung $u = -Kx$, so dass das Gütekriterium

$$I(x_0, u(\cdot)) = \int_0^\infty (x^T(\tau) Q x(\tau) + u^2(\tau)) \, d\tau$$

minimiert wird.

- a) Welche der folgenden Matrizen sind geeignet als Wahl für Q , so dass die algebraische Ricatti-Gleichung eine eindeutige, positiv semidefinite Lösung P hat? Begründen Sie.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

- b) Es sei jetzt $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Regler-Matrix K für die optimale Zustandsrückführung und den Wert des Gütefunktional bei der Regelung mit $u = -Kx$ für das System (1.a), (1.b).

(5 Punkte)

- c) Bei eisiger Kälte wird der Aktuator schwächer. In welchem Wertebereich von β ist der geschlossene Kreis garantiert stabil, wenn Sie den in b) berechneten Regler $u = -Kx$ verwenden? Gilt es auch, wenn Sie x mit Hilfe eines Luenberger-Beobachter rekonstruieren?

(2 Punkte)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Hinweis: Die Aufgabenteile a) und b) können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= (0 \quad 1) x,\end{aligned}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

- a) Berechnen Sie ein Eingangssignal $u(t) = u_k e^{z_k t} h(t)$ und Anfangsbedingungen $x_0 \neq 0$, so dass der Ausgang des Systems identisch Null wird. h ist dabei die Heaviside-Funktion. (3 Punkte)
- b) Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage 0 (d.h. es gilt $u(t) \equiv 0$) in Abhängigkeit von α mit Hilfe der Lyapunovfunktion

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Stellen Sie dabei jeweils fest ob die Ruhelage 0 auch asymptotisch stabil ist. Können Sie durch Ihre Analyse die Stabilitätseigenschaften der Ruhelage 0 vollständig für alle α angeben? Machen Sie eine geeignete Probe. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - 5x_2^4 \\ \dot{x}_2 &= x_1x_2^3 - 4x_2^7.\end{aligned}$$

Analysieren Sie die Stabilität der Ruhelagen des Systems mit einer quadratischen Lyapunovfunktion. (3 Punkte)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Hinweis: Alle Aufgabenteile können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

Zu den folgende Aussagen ist anzugeben, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

- a) Die $\mathcal{H}_\infty$ -Norm jedes minimalphasigen SISO-Systems mit einem Pol bei 0 (Integratoranteil) ist unendlich. (1 Punkt)
- b) Die $\mathcal{H}_\infty$ -Norm des Systems $G(s) = \frac{1}{s+1}$ ist 1. (1 Punkt)
- c) Die $\mathcal{H}_\infty$ -Norm des Systems $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ ist 1. (1 Punkt)
- d) Die Klasse der dynamischen unstrukturierten Unsicherheiten $\Sigma_\Delta = \{\Delta \mid \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$ umfasst auch Unsicherheiten mit höherer Systemordnung als diejenige des zugehörigen nominellen Systems. (1 Punkt)
- e) Wenn die $\mathcal{L}_2$ -Norm eines Signals $f(t)$ endlich ist, dann ist auch seine $\mathcal{L}_\infty$ -Norm endlich. (2 Punkte)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Hinweis: Die Aufgabenteile a) und b) können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \alpha x_1,\end{aligned}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

- a) Lässt sich mit Hilfe der Linearisierungsmethode eine Aussage über die Stabilität der Ruhelage 0 treffen? Begründen Sie Ihre Aussage. (1 Punkt)
- b) Für welche α kann die globale asymptotische Stabilität der Ruhelage 0 ausgeschlossen werden? (3 Punkte)

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\dot{x}_1 = -x_2^3 + x_2 - u$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1 + u$$

$$\dot{x}_3 = -x_3$$

$$y = x_1 + x_2.$$

- a) Nennen Sie die Bedingungen die für eine exakte E/A-Linearisierung erfüllt sein müssen. Bestimmen Sie eine E/A-linearisierende Rückführung $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$.
(3 Punkte)
- b) Bestimmen Sie nun eine E/A-linearisierende Rückführung $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$ so dass die Pole des E/A-linearisierten Systems bei -1 und -2 liegen.
(1 Punkt)
- c) Bestimmen Sie nun eine Rückführung $u(x, t)$ so dass $y(t)$ dem Signal $y_{\text{ref}} = \cos(t)$ asymptotisch folgt.
(2 Punkte)

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Betrachten Sie das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2x_3 + x_1 + u\end{aligned}$$

mit dem skalaren Eingang u .

- a) Zeigen Sie, dass der fiktive Ausgang $y_1 = x_2$ geeignet ist, um beim System eine Zustandslinearisierung durchzuführen. (2 Punkte)
- b) Geben Sie eine Zustandstransformation $z = \Phi(x)$ an, die das System in eine Byrnes/Isidori Normalform ohne Nulldynamik transformiert. Überprüfen Sie, ob es sich hierbei um einen Diffeomorphismus handelt. Wenn ja, ist dieser nur lokal in der Umgebung der Ruhelage 0 oder global gültig? (3 Punkte)

Betrachten Sie jetzt das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2x_3 + x_1\end{aligned}$$

mit dem skalaren Eingang u .

- c) Ihr Kollege behauptet nun, dass mit $y_2 = x_2 - x_3$ das System vollständig zustandslinearisiert werden kann. Hat er Recht? Begründen Sie. (2 Punkte)

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Gegeben sei der Regelkreis aus Abbildung 1. Das Modell der unsicheren Strecke ist gegeben mit

$$G_{real}(s) = \frac{1}{s-a}, \quad 0 < a < 4.$$

- a) Es soll $G_{real}(s)$ durch eine invers-additive unstrukturierte Unsicherheitsbeschreibung $G_{\Delta}(s)$ (Abbildung 2) ersetzt werden, so dass die parametrische Unsicherheit darin enthalten ist:

$$G_{\Delta}(s) = G(s)(1 - \underbrace{G(s)\Delta(s)W}_{\bar{\Delta}})^{-1} \quad \text{mit } \|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \text{ und } W \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie, dass dies mit der Wahl $G(s) = \frac{1}{s-2}$ und $W = 2$ möglich ist. Zeichnen Sie das zugehörige Blockschaltbild des geschlossenen Kreises. (2 Punkte)

- b) Leiten Sie die M - Δ -Struktur her (Abbildung 3), d.h. bestimmen Sie $M(s)$. (2 Punkte)

- c) Als Regler $K(s)$ werde nun ein P -Regler gewählt, $K(s) = k \in \mathbb{R}$. Nennen Sie ein Kriterium für robuste Stabilität des geschlossenen Kreises und bestimmen Sie anhand dessen den Wertebereich von $k \in \mathbb{R}$, so dass der geschlossene Kreis robust stabil ist bezüglich Δ . (2 Punkte)

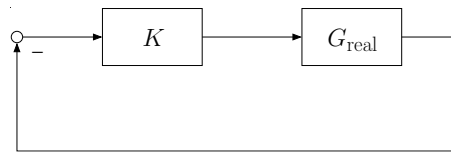


Abbildung 1: Unsicherer Regelkreis

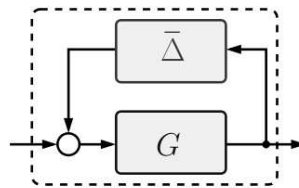


Abbildung 2: Invers-additive Unsicherheit G_{Δ}

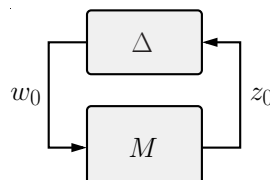


Abbildung 3: M - Δ -Struktur

Aufgabe 9 (9 Punkte)

Hinweis: Die Aufgabenteile a) und b) können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_2^3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2^3 + u \\ \dot{x}_3 &= x_2^3 + x_4 + u \\ \dot{x}_4 &= x_2 - x_3 + \frac{1}{3}(-x_2 + x_3)^3 - x_4 \\ y &= x_1 - x_2.\end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie eine Zustandsrückführung $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ sowie Anfangsbedingungen so dass $y(t) \equiv 0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Nulldynamik des Systems durch

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -\eta_1 + \frac{1}{3}\eta_1^3 - \eta_2\end{aligned}$$

gegeben ist.

(3 Punkte)

- b) Analysieren Sie die Stabilität der Ruhelage 0 der Nulldynamik. Verwenden Sie dazu die Funktion $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned}V(\eta) &:= \frac{1}{2}(\eta_1, \eta_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \int_0^{\eta_1} \left(s - \frac{1}{3}s^3\right) ds \\ &= \frac{3}{4}\eta_1^2 - \frac{1}{12}\eta_1^4 + \frac{1}{2}\eta_1\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_2^2.\end{aligned}$$

Erklären Sie zuerst warum V geeignet ist um die Stabilität der Ruhelage 0 der Nulldynamik zu überprüfen. Verwenden Sie bei der Stabilitätsanalyse auch die Abbildung 4 auf der folgenden Seite die einige Höhenlinien der Funktion V in der η_1 - η_2 -Ebene darstellt. Wie würden Sie die Anfangsbedingungen der Nulldynamik wählen um diese asymptotisch gegen Null konvergieren zu lassen?

(6 Punkte)

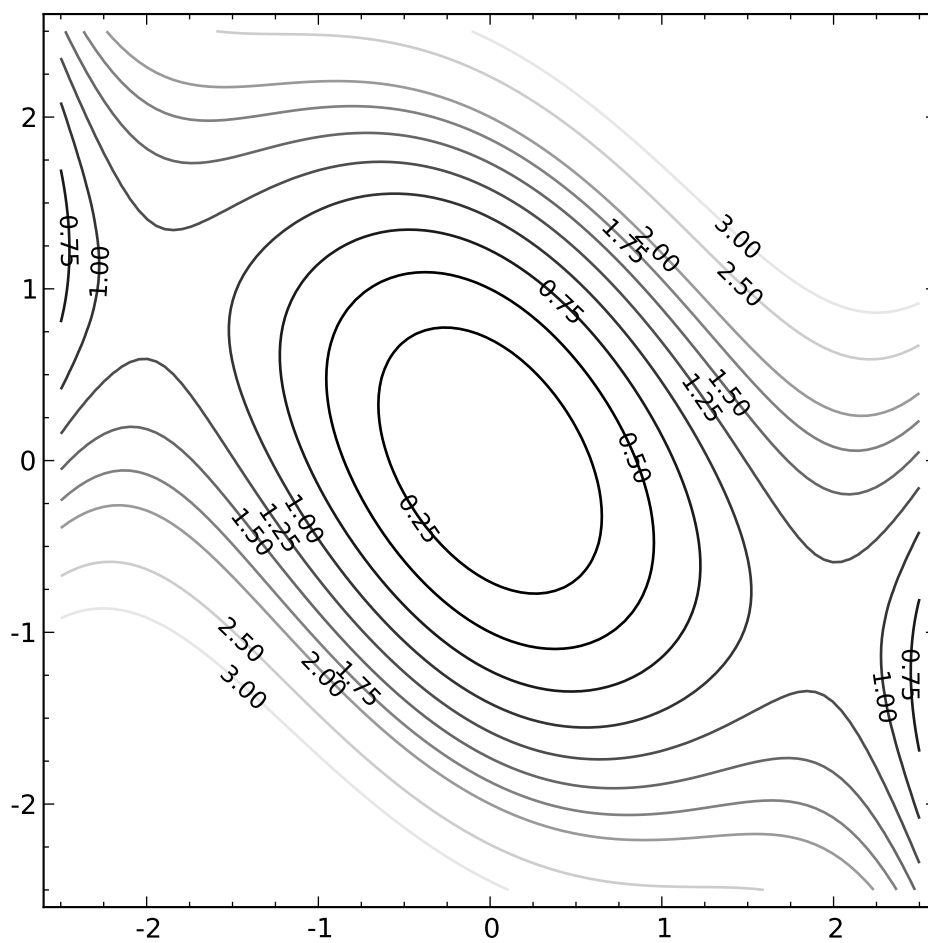


Abbildung 4: Höhenlinien der Funktion V .